

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Ερωτήσεις τύπου «Σωστό ή Λάθος»

- a. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x=0$ και $y=0$.
- b. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f , μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .
- c. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.
- d. Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- e. Αν για μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , ισχύει $f'(x) = e^x \ln 4$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

B. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x) f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$. (μον.10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 - (1-x)(\ln x - 2)$

- i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (μον.6)
- ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:
$$x^2 - 2 = (1-x)(\ln x - 2) \quad (\text{μον.6})$$
- iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (μον.6)
- iv) Να αποδείξετε ότι $(1-x)(\ln x - 2) \leq x^2 - 1$ για κάθε $x > 0$. (μον.6)
- v) Αν είναι $(1-x)(\ln a - 2) \leq x^2 - 1$ για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι $a = 1$. (μον.6)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) $f'(x) = -2x f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- a. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.
- β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- γ. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x f(x) \ln 2x)$.

ΘΕΜΑ 4⁰

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^{x+e^x}$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$.
- iii. Να δείξετε ότι: $e^{e^x+x-1} \geq 2x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x+4) - f(2x+3) < f(x+1) - f(x)$.