

.ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.
 - α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.
 - β) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.**
 - γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.**
 - δ) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.**
2. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x - 2020)^{2020} = x^{2020} + 2020^{2020}$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μία μόνο λύση.
3. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$, ώστε $P(x) \neq Q(x)$ και $P''(x) \neq Q''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = Q'(x)$ έχει ακριβώς μια λύση, εξετάζοντας το βαθμό του $S(x) = P(x) - Q(x)$.
4. Έστω ότι $x^a \geq a^x$ ($a > 0$) για κάθε $x > 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι $a = e$.
5. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0, 6]$. Αν η C_f περνά από το σημείο $A(0, 1)$ και ισχύει: $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0, 6]$, να αποδείξετε ότι:
 - α) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 6]$.
 - β) $g(x) > 0$, $x \in [0, 6]$.
 - γ) το σημείο $B(6, 18)$ δεν ανήκει στη C_f .
6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.
 - α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.
 - β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$.
 - γ) Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την $y = x$.
 - δ) Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2$, $a \neq 0$.
 - α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
 - β) Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x^3$.
8. Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
 - α) Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμψής.
 - β) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, ώστε στο σημείο καμψής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Αν έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων στα x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$.

9. Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για $x \neq \beta$, να δείξετε ότι

$$\text{υπάρχει } x_0 \in (\alpha, \beta): \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1}{\alpha - x_0}$$

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in (e, e^3), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_0) = \frac{1}{1 - x_0}.$$

11. Να μελετηθούν και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

ii. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

iii. $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

iv. $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$

v. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$